Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada de Matematică
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti
11 Martie 2006

CLASA A XI-A – SOLUŢII şi BAREM ORIENTATIV

Problema 1. Fie $x > 0$ un număr real şi A o matrice pătrată de ordin 2, care are elemente reale şi verifică relaţia

$$\det(A^2 + xI_2) = 0.$$

Demonstraţi că $\det(A^2 + A + xI_2) = x$.

Soluţie. Din ipoteză obţinem $\det(A+i\sqrt{x}I_2)\cdot\det(A-i\sqrt{x}I_2) = 0$, de unde, notând cu d determinantul matricei A şi cu t urma acestei matrice, rezultă că $d = x$ şi $t = 0$, deci $A^2 + xI_2 = 0_2$. ....(6 puncte)

Astfel, $\det(A^2 + A + xI_2) = \det(A) = x$. ....(1 punct)

Problema 2. Considerăm două numere întregi $n, p \geq 2$ şi o matrice pătrată A de ordin n, care are elemente reale şi verifică relaţia $A^{p+1} = A$.

a) Demonstraţi că $\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(I_n - A^p) = n$.

b) Demonstraţi că dacă, în plus, p este prim atunci

$$\operatorname{rang}(I_n - A) = \operatorname{rang}(I_n - A^2) = \ldots = \operatorname{rang}(I_n - A^{p-1}).$$

Soluţie. a) Din inegalitatea lui Sylvester avem $\operatorname{rang}(A)+\operatorname{rang}(I_n-A^p) \leq \operatorname{rang}(A(I_n - A^p)) + n = n$.

Pe de altă parte, $\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(I_n - A^p) \geq \operatorname{rang}(A^p) + \operatorname{rang}(I_n - A^p) \geq \operatorname{rang}(A^p + (I_n - A^p)) = n$. .... (2 puncte)

b) Folosim observaţia: dacă $k, m \in \mathbb{N}^*$ şi $k \,|\, m$ atunci $\operatorname{rang}(I_n - A^k) \geq \operatorname{rang}(I_n - A^m)$

Într-adevăr, $I_n - A^m$ se poate scrie ca produs de două matrice, dintre care una este $I_n - A^k$, iar $\operatorname{rang}(XY) \leq \operatorname{rang}(X)$ pentru orice matrice X, Y.

Fie acum $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq p-1$. Din ipoteză avem $A^{kp+1} = A$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Observăm apoi că, deoarece p este prim, resturile împărţirii numerelor $p+1, 2p+1, \ldots, kp+1$ la k sunt două câte două distincte. De aceea, unul dintre numerele precedente, fie el $t = qp+1$, este divizibil cu k. Astfel, $\operatorname{rang}(I_n - A) \geq \operatorname{rang}(I_n - A^k) \geq \operatorname{rang}(I_n - A^t) = \operatorname{rang}(I_n - A^{pq+1}) = \operatorname{rang}(I_n - A)$..................(5 puncte)

Problema 3. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale care verifică relaţia

$$(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n + 1) \leq 0, \;\; n \geq 0.$$

a) Demonstraţi că şirul este mărginit.

b) Este posibil ca şirul să nu fie convergent?

Soluţie. a) Din ipoteză avem $x_{n+1}^2 + x_{n+1} \leq x_n^2 + x_n$, deci şirul dat de $y_n = x_n^2 + x_n$ este descrescător. .... (2 puncte)

Cum (y_n) este şi mărginit inferior, el este convergent. De aceea, (x_n) este mărginit (în caz contrar şirul (y_n) ar avea un subşir nemărginit). ....(3 puncte)

b) Da; un exemplu este $x_n = \frac{-1+(-1)^n}{2}$ .... (2 puncte).

Problema 4. Spunem că o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea (P) dacă, pentru orice x real,

$$\sup_{t \leq x} f(t) = x.$$

a) Daţi un exemplu de funcţie care are proprietatea (P) şi este discontinuă în fiecare punct real.

b) Demonstraţi că dacă f este continuă şi are proprietatea (P) atunci f este funcţia identică.

Soluţie. a)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ x-1 & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

....(2 puncte)

b) Observăm că $\sup\limits_{t \leq x} f(t) = \sup\limits_{y \leq t \leq x} f(t)$, pentru orice $y \leq x$

.... 1 punct

Întrucât f este continuă, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $x_n < x$, astfel încât

$$|f(t) - f(x)| < \frac{1}{n},$$

pentru orice $t \in [x_n, x]$ .... 2 puncte

Prin urmare,

$$|\sup_{x_n \leq t \leq x} f(t) - f(x)| \leq \frac{1}{n},$$

adică $|x - f(x)| \leq \frac{1}{n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $f(x) = x$

.... 2 puncte